**ОПЕРАТОРОВ И ИХ СПЕКТРЫ**

Ф. Журакулова[1]

*Аннотация*

В статье рассматривается интегральный оператор, действующий в гильбертовом пространстве с весом. Установлено унитарная эквивалентность этого интегрального оператора к интегральному оператору в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций по бесконечному интервалу.

*Ключевые слова:* унитарная эквивалентность, интегральный оператор, гильбертово пространство функций с весом, область значений, норма, существенный спектр.

Пусть $\delta > 0$ и $L_2((0,\delta);4\pi p^2)$ - гильбертово пространство функций квадратично-интегрируемых по интервалу $(0,\delta)$ с весом $4\pi p^2$. При этом норма элемента $\psi \in L_2((0,\delta);4\pi p^2)$ определяется следующим образом:

$$\|\psi\| = \left( \int_0^\delta 4\pi p^2 |\psi(p)|^2 \, dp \right)^{1/2}.$$

В гильбертовом пространстве $L_2((0,\delta);4\pi p^2)$ рассмотрим интегральный оператор $T$, действующий по формуле

$$(Tf)(p) = \int_0^\delta \frac{r^{1/2}}{|p|^{3/2}} \ln \frac{p^2 + pr + r^2}{p^2 - pr + r^2} f(r)dr \cdot$$

Приведем некоторые определение. Пусть $X$ и $Y$ - гильбертовы пространства. Оператор $A$ из $X$ в $Y$ называется изометричным, если $\|Au\| = \|u\|$ для всех $u \in X$. Более общим образом, можно определить, изометричные операторы, действующие из одного нормированного пространства в другое, однако такое обобщение не требуется. Изометричный оператор называется унитарным, если образ оператора $A$ совпадавт со всем $Y$. Оператор $B$ в $Y$ называется унитарно эквивалентным оператору $A$ в $X$, если существует унитарный оператор $U$ из $X$ в $Y$, такой, что $BU = UA$.

Пусть оператор $F$ действует из пространства $L_2((0,\delta);4\pi p^2)$ в пространство $L_2(0,\infty)$ по правилу

$$(F\psi)(p) = 2\sqrt{\pi}\delta^{3/2} e^{-3p/2} \psi(\delta e^{-p}).$$

Оператор $F$ сохраняет норму и его область значений совпадает со всем пространством. Действительно,

$$\|F\psi\|^2 = \int_0^\infty 4\pi\delta^3 e^{-3t} |\psi(\delta e^{-t})|^2 \, dt \cdot$$

Сделая замену $\delta e^{-t} = p$ мы получим, что

$$\|F\psi\|^2 = \int_0^\delta 4\pi\delta^3 \frac{p^3}{\delta^3} \frac{1}{p} |\psi(p)|^2 \, dp = \int_0^\delta 4\pi p^2 |\psi(p)|^2 \, dp = \|\psi\|^2 \cdot$$

**Теорема.** *Оператор $T$ унитарно эквивалентен оператору $S$, действующему в гильбертовом пространстве $L_2(0,\infty)$ по формуле*

$$(Sf)(p) = \int_0^\delta \ln \frac{e^{2(p-t)} + e^{p-t} + 1}{e^{2(p-t)} - e^{p-t} + 1} f(t)dt \cdot$$

[1] *Журакулова Ферангис* – учительница математики школы №4, Бухара, Узбекистан.

**Доказательство.** Унитарная эквивалентность операторов $T$ и $S$ осуществляется при помощью унитарного оператора $F$. Легко можно, проверить, что $FT = SF$. Имеем

$$(FTf)(p) = 2\sqrt{\pi}\delta^{3/2}\int_0^{\delta}\frac{r^{1/2}e^{-3p/2}}{|re^{-p}|^{3/2}}\ln\frac{|\delta e^{-p}|^2 + e^{-p}r + r^2}{|\delta e^{-p}|^2 - e^{-p}r + r^2}f(r)dr.$$

Сделая замену $\delta / r = e^t$, $dr = -\delta e^{-t}dt$ получим, что

$$(FTf)(p) = 2\sqrt{\pi}\delta^{3/2}\int_0^{\infty}e^{-3t/2}\ln\frac{e^{2(t-p)} + e^{t-p} + 1}{e^{2(t-p)} - e^{t-p} + 1}f(\delta e^{-t})dt.$$

Теперь рассмотрим $SF$:

$$(SF\psi)(p) = \int_0^{\infty}\ln\frac{e^{2(t-p)} + e^{t-p} + 1}{e^{2(t-p)} - e^{t-p} + 1}2\sqrt{\pi}\delta^{3/2}e^{-3t/2}\psi(\delta e^{-t})dt$$

$$= 2\sqrt{\pi}\delta^{3/2}\int_0^{\infty}e^{-3t/2}\ln\frac{e^{2(t-p)} + e^{t-p} + 1}{e^{2(t-p)} - e^{t-p} + 1}\psi(\delta e^{-t})dt.$$

Из последних двух равенств следует, что $FT = SF$. Теорема доказана.

Следует отметить, что оператор $S$ является ограниченным, самосопряженным оператором, спектр которого совпадает с множеством значений, принимаемых функцией

$$\hat{S}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\ln\frac{e^{2t} + e^t + 1}{e^{2t} - e^t + 1}dt$$

при вещественных $\lambda$.

Из непрерывности функции $\hat{S}(\cdot)$ следует, что если при некотором $\lambda$ имеет место неравенство $\hat{S}(\lambda) > 1$, то существенный спектр оператора $S$ содержит интервал расположенный правее точки 1. Такие утверждение играют важную роль при доказательстве бесконечности число собственных значений трехчастичных модельных операторов на решетке [1] и матричных операторов действующих в обрезанных подпространствах фоковского пространства [2-4].

*Список литературы*


1. Т.Х.Расулов. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2010, -Т. 163, -№ 1, -С. 34-44.
2. S.Albeverio, S.N.Lakaev, T.H.Rasulov. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics. Journal of Statistical Physics. vol. 127 (2007), no. 2, pp. 191-220.
3. S.Albeverio, S.N.Lakaev, T.H.Rasulov. The Efimov Effect for a Model Operator Associated with the Hamiltonian of non Conserved Number of Particles. «Methods of Functional Analysis and Topology», vol. 13, no. 1, 2007, pp. 1-16.
4. Т.Х.Расулов. О числе собственных значений одного матричного оператора. Сибирский математический журнал. 2011, Т. 52, № 2, С. 400-415.