Физико-математические науки

УДК 517.984

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Ш. Бердиёров[1], У.Я. Тураев[2], Х.Х. Жабборов[3]

Аннотация

Данные статья посвящена периодическим решением квазилинейных интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием и малым параметром в критических случаях. Изучается критический случай второго порядка согласно классификации, предложенной Ю.А.Рябовим. Постовленная задача рещается с помощью метода, развитого Ю.А.Рябовим для квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и опирающегося на так называемые конечные мажорирующие уравнения Ляпунова.

Ключевые слова: аналитическая функция, последовательных приближений, критический случай второго порядка, нелинейное уравнение, конечных, мажорирующих уравнений Ляпунова.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \xi\left[\int_{-\infty}^{t} R(t-s)x(s)ds + f(x,t)\right] \quad (1)$$

где $f(x,t)$ - 2π -периодическая, аналитическая по и дифференцируемая по t на $(-\infty,\infty)$ функция; ξ -малый параметр (его считаем положительным); $R(t-s)$ - ядро, предполагаемое равным

$$R(t-s) = e^{-\gamma(t-s)} \quad (2)$$

где γ -постоянная, причем $\gamma > 0$.

Пусть

$$f(x,t) = \sin t + ax\cos^2 t + x^2 \sin 2t \quad (3)$$

где

$$a = -\frac{2}{\gamma} \quad (3')$$

Нас интересует периодическое решение уравнения (1), непрерывное по ξ и обращающееся в нуль при $\xi = 0$.

Рассмотрим порождающее (получающееся из (1) при $\xi = 0$)

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (4)$$

откуда

$$x = c = const \quad (5)$$

Положим $x = c + y$ и составим уравнение относительно y:

$$\frac{dy}{dt} = \xi\left[\int_{-\infty}^{t} R(t-s)y(s)ds + c\int_{-\infty}^{t} R(t-s)ds + \sin t + a(c+y)\cos^2 t + (c+y)\sin 2t\right] \quad (6)$$

Это уравнение приводится к виду

---

[1]*Бердиёров Азамат Шодиевич* – к.ф.м.н., Джизакский политехнический институт, Узбекистан.

[2]*Тураев Уткирбек Яхшиликович* – преподаватель, Джизакский политехнический институт, Узбекистан.

[3]*Джабборов Хуршид Халикулович* – преподаватель, Джизакский политехнический институт, Узбекистан.

$$\frac{dx}{dt}=\xi\left[\int_{-\infty}^{t}e^{-\gamma(t-s)}y(s)ds+F(t,y,c)\right] \quad (7)$$

где

$$F(t,y,c)=\frac{c}{\gamma}+\frac{ac}{2}+\sin t+\frac{ac}{2}\cos 2t+c^2\sin 2t+\frac{a}{2}y+\frac{a}{2}y\cos 2t+2cy\sin 2t+y^2\sin 2t \quad (8)$$

Ищем периодическое решение с помощью последовательных приближений. Первое приближение $y_1(t,\xi)$ определим из уравнения:

$$\frac{dy_1}{dt}=\xi\left[\int_{-\infty}^{t}e^{-\gamma(t-S)}y_1(S)ds+F(t,0,c)\right] \quad (9)$$

где

$$F(t,0,c)=\frac{c}{\gamma}+\frac{ac}{2}+\sin t+\frac{ac}{2}\cos 2t+c^2\sin 2t \quad (9')$$

Условие существования периодического решения уравнения (9) имеет вид

$$\varPhi_0(c)\equiv\frac{c}{\gamma}+\frac{ac}{2}=0 \quad (10)$$

В силу (3') это условие удовлетворяется тождественно при произвольном C и мы имеем согласно критический случай выше первого порядка.

Построим решение уравнения (9), оставляя C произвольным. Получим, так называемое, предварительное выражение для y_1:

$$\tilde{y}_1(t,c,\xi)=\alpha_1\cos t+\beta_1\sin t+\alpha_2\cos 2t+\beta_2\sin 2t, \quad (11)$$

где $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2$ и β_2 равны:

$$\alpha_1=-\frac{\xi(1+\gamma^2+\xi)(1+\gamma^2)}{(1+\gamma^2+\xi)^2+\xi^2\gamma^2}$$

$$\beta_1=-\frac{\xi^2\gamma(1+\gamma^2)}{(1+\gamma^2+\xi)^2+\xi^2\gamma^2}$$

$$\alpha_2=-\frac{\xi(4c^2(4+\gamma^2+\xi)+\xi ac\gamma)(4+\gamma^2)}{2(\xi^2\gamma^2+4(4+\gamma^2+\xi)^2)} \quad (12)$$

$$\beta_2=-\frac{\xi(ac(4+\gamma^2+\xi)-\xi c^2\gamma)(4+\gamma^2)}{\xi^2\gamma^2+4(4+\gamma^2+\xi)^2}.$$

Второе приближение $y_2(t,\xi)$ будем искать соответственно из уравнения

$$\frac{dy_2}{dt}=\xi\left[\int_{-\infty}^{t}e^{-\gamma(t-S)}y_2(s)ds+F(t,0,c)+\tilde{F}(t,\tilde{y}_1(t,c,\xi)c_1)\right] \quad (13)$$

где

$$F(t,0,c)=\sin t+\frac{ac}{2}\cos 2t+c^2\sin 2t;$$

$$\tilde{F}(t,\tilde{y}_1(t,c_1,\xi),c_1)=\frac{a}{2}\tilde{y}_1+\frac{a}{2}\tilde{y}_1\cos 2t+2c_1\tilde{y}_1\sin 2t+\tilde{y}_1^2\sin 2t=\frac{ad_2}{4}+c_1\beta_2+\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1+$$
$$+(\frac{3a}{4}\alpha_1+c_1\beta_1+\alpha_1\beta_2)\cos t+\left(\frac{a}{4}\beta_1+c_1\alpha+\beta_1\beta_2\right)\sin t+\left(\frac{a}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\right)\cos 2t+$$
$$+\left(\frac{a}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\alpha_1^2+\frac{1}{2}\beta_1^2+\frac{1}{4}\alpha_2^2+\frac{3}{4}\beta_2^2\right)\sin 2t+\left(\frac{a}{4}\alpha_1-c_1\beta_2-\frac{1}{2}\alpha_1\beta_2+\frac{1}{2}\beta_1\alpha_2\right)\cos 3t+$$
$$+\left(\frac{a}{4}\beta_1-c_1\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{2}\beta_1\beta_2\right)\sin 3t+\frac{a}{4}\alpha_2-c_1\beta_2-\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1)\cos 4t; \tag{14}$$
$$\left(\frac{a}{4}\beta_1-c_1\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_1^2-\frac{1}{4}\beta_1^2+\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\right)\sin 4t-\frac{1}{2}\left(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2\right)\cos 5t-$$
$$-\frac{1}{2}\beta_1\beta_2\sin 5t-\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\cos 6t+\frac{1}{4}\left(\alpha_2^2-\beta_2^2\right)\sin 6t$$

причем в выражениях (12) для $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ следует заменить C на C_1-первое приближение для C. Условие существования периодического решения запишется в виде:

$$\Phi_1(C_1,\xi)\equiv\frac{a\alpha_2}{4}+C_1\beta_2+\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1=0 \tag{15}$$

и оно представляет собой нелинейное уравнение относительно C_1.

Используя (12), приведем (15) к виду:

$$\xi^2C_1^2g_2+\xi C_1^2\left(\frac{a}{4}p_1+g_1\right)+\xi^2C_1\frac{a}{4}p_2+\frac{1}{2}\xi^3r_0r_1=0 \tag{16}$$

$$r_1=-\frac{\left(1+\gamma^2+\xi\right)\left(1+\gamma^2\right)}{\left(1+\gamma^2+\xi\right)^2+\xi^2\gamma^2};$$
$$r_2=-\frac{\gamma\left(1+\gamma^2\right)}{\left(1+\gamma^2+\xi\right)^2+\xi^2\gamma^2};$$
$$p_1=-\frac{4\left(4+\gamma^2+\xi\right)\left(4+\gamma^2\right)}{2(\xi^2\gamma^2+4\left(4+\gamma^2+\xi\right)^2)};$$
$$p_2=-\frac{a\gamma\left(4+\gamma^2\right)}{2(\xi^2\gamma^2+4\left(4+\gamma^2+\xi\right)^2)} \tag{17}$$
$$g_1=\frac{a\left(4+\gamma^2+\xi\right)\left(4+\gamma^2\right)}{\xi^2\gamma^2+4\left(4+\gamma^2+\xi\right)^2}$$
$$g_2=-\frac{\gamma\left(4+\gamma^2\right)}{\xi^2\gamma^2+4\left(4+\gamma^2+\xi\right)^2}$$

или

$$\xi^2C_1^3g_2+C_1^2B+\xi C_1\frac{a}{4}P_2+\frac{1}{2}\xi^2r_1r_2=0 \tag{18}$$

где

$$B=\frac{a}{4}P_1+g_1 \tag{18'}$$

Пологая

$$C_1 = \xi A_1 \tag{19}$$

и сократщая на ξ^2, получим уравнение

$$\xi^2 A_1^3 g_2 + A_1^2 B + A_1 \frac{a}{4} P_2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 = 0 \tag{20}$$

Пусть $A_1^{(i)}$, $i = 1, 2$ -корни уравнения

$$A_1^2 B + A_1 \frac{a}{4} P_2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 = 0 \tag{21}$$

Например, при $\xi = 0{,}1;\ \gamma = 0{,}5$ из (17) и (21) получим $r_1 = -0{,}9246,\ r_2 = 0{,}3426,\ P_1 = -0{,}4885,\ P_2 = 0{,}6561,\ g_1 = -0{,}9770,\ g_2 = -0{,}0281$ и два корня для $A_1^{(i)} : A_1^{(1)} = 0{,}5147$ и $A_1^{(2)} = -0{,}6296$.

Производная левой части уравнения (20) по A_1 равна

$$3\xi^2 A_1^2 g_2 + 2A_1 B + \frac{a}{4} P_2 = 0 \tag{22}$$

и при $A_1 = A_1^{(i)},\ i = 1, 2,\ \xi = 0$ отлична от нуля.

Таким образом, согласно (17) мы имеем критический случай второго порядка.

Полагая $A_1 = A_1^{(1)} + \rho$, составим уравнение относительно ρ

$$(2A_1^{(1)} B + \frac{a}{4} P_2)\rho + \rho^2 B + \xi^2 (A_1^{(1)} + \rho)^3 g_2 = 0 \tag{23}$$

Отсюда

$$\rho = \frac{-\xi^2 g_2 (A_1^{(1)} + \rho)^3 - \rho^2 B}{2A_1^{(1)} B + \frac{a}{4} P_2} \tag{24}$$

Уравнение (24) нелинейное уравнение относительно ρ. Его решение $\rho(\xi)$ при малых ξ (причем такое, что $\rho(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$) нетрудно найти методом посладовательных приближений по формуле:

$$\rho_K = -\frac{\xi^2 g_2 \left(A_1^{(1)} + \rho_{K-1}\right)^3 + \rho_{K-1}^2 B}{2A_1^{(1)} B + \frac{a}{4} P_2} \qquad K = 1, 2, 3, \ldots.., \rho_0 = 0 \tag{25}$$

Например, при $\xi = 0{,}1,\ \gamma = 0{,}5,\ A_1^{(1)} = 0{,}5147$ найдем $\rho = -0{,}00006834$.

Это значение ρ назовем первым приближением для ρ и обозначим ρ_1 .

При $\xi = 0{,}1,\ \gamma = 0{,}5$ и $A_1^{(2)} = -0{,}6295$ найдем $\rho = -0{,}00012435$.

Таким образом, первое приближение C_1 для C равно

$$C_1 = C_1^* = \xi\left(A_1^{(i)} + \rho_1\right), \qquad i = 1, 2 \tag{26}$$

При $A_1 = A_1^{(1)}$ и $A_1 = A_1^{(2)}$ получим два значения C_1.

Вычисления проведем дальше для $A_1 = A_1^{(1)}$.

Мы получим при $\xi = 0{,}1,\ \gamma = 0{,}5$

$$\begin{gathered} C_1 = C_1^* = 0б05146317,\ \alpha_1 = -0{,}09246575,\ \beta_1 = -0{,}00342466, \\ \alpha_2 = -0{,}00010066,\ \beta_2 = -0{,}00503034 \end{gathered} \tag{27}$$

и окончательное выражение для $y_1(t, \xi)$

$$y_1(t, \xi) = -\left(0{,}0925\cos t + 0{,}0034\sin t + 0{,}0001\cos 2t + 0{,}0050\sin 2t\right) \tag{28}$$

Периодическое с периодом 2π -решение уравнения (13) найдем в виде

$$y_2(t, C_1, \xi) = \tilde{y}_1(t, C, \xi) + y_2(t, \xi) \tag{29}$$

где $\tilde{y}_1(t,C,\xi)$ совпадает с (11) (т.е. $\tilde{y}_1(t,C,\xi)$ соответствуют функции $F(t,0,C)$ в правой части системы (13) с произвольным C), а $\tilde{y}_2(t,\xi)$ - остальным членам, где полагаем $C = C_1^*(\xi)$. Функция $\tilde{y}_2$ не содержит произвольных постоянных.

Мы получим

$$\tilde{y}_2(t,\xi) = n_1\cos t + m_1\sin t + n_2\cos 2t + m_2\sin 2t + n_3\cos 3t + m_3\sin 3t + n_4\cos 4t +$$
$$+m_4\sin 4t + n_5\cos 5t + m_5\sin 5t + n_6\cos 6t + m_6\sin 6t \tag{30}$$

Для $n_1, m_1, ..., m_6, n_6$ получим

$$n_1 = -\xi^2 C_1^* r_1 - \frac{1}{4}\xi^3\left(ar_2 + \frac{3a\gamma r_1}{1+\gamma}\right) + ...,$$

$$m_1 = \frac{3\xi^2 ar_1}{4} + \xi^2 C_1^*\left(r_2 - \frac{r_1\gamma}{1+\gamma^2} + r_1 g_1\right) + ...,$$

$$n_2 = -\frac{\xi^2 aC_1^* g_1}{4} - \frac{\xi^3}{4}\left(C_1^{*2}a(g_2 + \frac{\gamma P_1}{4+\gamma^2}) + r_1^2\right) + ...,$$

$$m_2 = \frac{\xi^2 aC_1^{*2}P_1}{4} + \frac{\xi^3 C_1^*}{4}\left(P_2 - \frac{a\gamma g_1}{2\left(4+\gamma^2\right)}\right) + ...,$$

$$n_3 = -\frac{\xi^2 C_1^* r_1}{3} - \frac{\xi^3 a}{12}\left(r_2 + \frac{\gamma r_1}{3\left(9+\gamma^2\right)}\right) + ...,$$

$$m_3 = \frac{\xi^2 ar_1}{12} - \frac{\xi^3 C_1^*}{3}\left(r_2 + \frac{\gamma r_1}{4\left(9+\gamma^2\right)}\right) + ...,$$

$$n_4 = -\frac{\xi^2 C_1^*}{16}\left(ag_1 + 4C_1^{*2}P_1\right) -$$
$$-\frac{\xi^3}{16}\left[aC_1^{*2}\left(g_2 + \frac{\gamma P_1}{4\left(16+\gamma^2\right)} + C_1^{*2}\left(4P_2 + 2r_1P_1 + \frac{g_1}{16+\gamma^2}\right) + r_1^2\right)\right] + ...$$

$$m_4 = \frac{\xi^3 C_1^{*2}}{16}\left(aP_1 + 4g_1\right) + \frac{\xi^3}{16}\left[aC_1^*\left(P_2 - \frac{\gamma g_1}{4\left(16+\gamma^2\right)} - C_1^{*3}\left(4g_2 + \frac{\gamma aP_1}{16+\gamma^2}\right)\right)\right] ....,$$

$$n_5 = \frac{\xi^3 r_1 C_1^* g_1}{10} + ...,$$

$$m_5 = \frac{\xi^4 C_1^* g_1}{10}\left(\frac{\gamma r_1}{5\left(25+\gamma^2\right)} - r_1\right) + ...,$$

$$n_6 = \frac{\xi^3 C_1^{*3} P_1 g_1}{12} + ...,$$

$$m_6 = \frac{\xi^3 C_1^{*2} g_1}{24}\left(C_1^{*2}P_1^2 - q_1^2\right) + ... \tag{31}$$

Например при $\xi = 0{,}1$ $\gamma = 0{,}5$ из (31) получим:

$n_1 = -0,00023614$	$m_1 = 0,02765479$	$n_2 = 0,00021349$
$m_2 = 0,00001066$	$n_3 = 0,00003898$	$m_3 = 0,00307592$
$n_4 = -0,00012595$	$m_4 = 0,00000972$	$n_5 = 0,00000465$
$m_5 = 0,00000017$	$n_6 = 0,00000005$	$m_6 = 0,00000010$

Третье приближение y_3 будем искать из уравнения

$$\frac{dy_3}{dt} = \varepsilon\left[\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)} y_3(s)ds + F(t,0,C) + F(t,\tilde{y}_1,(t,\xi,C_2) + \bar{y}_2(t,C_1^*,\xi),C_2)\right] \qquad (32)$$

где

$$F(t,\tilde{y}_1,(t,\xi,C_2) + \bar{y}_2(t,C_1^*,\xi),C_2) = \frac{a}{2}(\tilde{y}_1 + y_2) + \frac{a}{2}(\tilde{y}_1 + \bar{y}_2)\cos 2t + 2C_2(\tilde{y}_1 + y_2)\sin 2t +$$

$$+(\tilde{y}_1 + \bar{y}_2)^2 \sin 2t = \frac{a}{2}\tilde{y}_1 + \frac{a}{2}\tilde{y}_1\cos 2t + 2C_2\tilde{y}_1 \sin 2t + \tilde{y}_1^2 \sin 2t + \frac{a}{2}\bar{y}_2 + \cos 2t +$$

$$+2C_2\bar{y}_2 \sin 2t + 2\tilde{y}_1\bar{y}_2 \sin 2t + \bar{y}_2^2)\sin 2t \qquad (33)$$

Условие существования 2π-периодического решения этой системы

$$\Phi_2(c_2,\xi) = \frac{a}{4}\alpha_2 + c_2\beta_2 + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_1 + \frac{a}{4}n_2 + c_2m_2 + \frac{1}{2}\alpha_1m_1 + \frac{1}{2}\alpha_1m_3 + \frac{1}{2}\beta_1n_1 - \frac{1}{2}\beta_1n_3 +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_2m_4 - \frac{1}{2}\beta_2n_4 + \frac{1}{2}n_1m_1 + \frac{1}{2}n_1m_3 - \frac{1}{2}m_1m_3 + \frac{1}{2}n_2m_4 - \frac{1}{2}m_2n_4 + \frac{1}{2}n_3m_5 - \frac{1}{2}m_3n_5 +$$

$$+\frac{1}{2}n_4m_6 - \frac{1}{2}m_4n_6 = 0 \qquad (34)$$

Так как $y_1 = y(t,c_2,\xi)$ имеет то же самое выражение, что и $y_1 = y(t,c_1,\xi)$ с точностью до обозначений (C_2 вместо C_1), а $\|\bar{y}_2\|$ ξ^2, то левая часть этого уравнения отличается от левой части уравнения (15) членами порядка не ниже ξ^2.

Можно записать

$$\Phi_2(c_2,\xi) \equiv \Phi_1(c_2,\xi) + \xi^2\tilde{\Phi}_2(c_2,\xi) = 0 \qquad (35)$$

где функция $\tilde{\Phi}_2(c_2,\xi)$ конечна при $\xi = 0$.

Используя (12), (18) и (31) приведем (34) к виду

$$\xi C_2^3 g_2 + C_2^2\beta + \xi C_2\frac{a}{4}P_2 + \frac{1}{2}\xi^2 r_1 r_2 + \xi^2 D = 0 \qquad (36)$$

где

$$D = C_2B_1 + B_2$$

$$B_1 = \frac{aC_1^*P_1}{4} + \frac{\xi C_1^*}{4}(P_2 - \frac{a\gamma g_1}{2(4+\gamma^2)}) \qquad (36')$$

$$B_1 = \frac{a}{4}n_2 + \frac{1}{2}\alpha_1m_1 + \frac{1}{2}\alpha_1m_3 + \frac{1}{2}\beta_1n_1 - \frac{1}{2}\beta_1n_3 + \frac{1}{2}\alpha_1m_4 - \frac{1}{2}\beta_2n_4 + \frac{1}{2}n_1m_1 + \frac{1}{2}m_3n_1 -$$

$$-\frac{1}{2}m_4n_3 + \frac{1}{2}m_4n_2 - \frac{1}{2}m_2n_4 + \frac{1}{2}n_3m_5 - \frac{1}{2}m_3n_5$$

Положив,

$$C_2 = \varepsilon A_2 \qquad (37)$$

получим уравнение

$$\xi^4 A_2^3 g_2 + \xi^2 A_2^2 B + \xi^2 \frac{a}{4} P_2 A_2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 \xi^2 + D\xi^2 = 0 \quad (38)$$

или

$$\xi^2 A_2^3 g_2 + A_2^2 B + \frac{a}{4} P_2 A_2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 + D = 0 \quad (39)$$

Пусть $A_2^{(i)}$, $i = 1,2$ корень уравнения

$$A_2^2 B + \frac{a}{4} P_2 A_2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 + D = 0 \quad (40)$$

Например, при $\xi = 0,1$ $\gamma = 0,5$ из (36') и (40) получим $B_1 = 0,00107,$ $B_2 = -0,0016,$ $a = 0,5119,$ $A_2^{(2)} = -0,6265$.

Полагая, $A_2 = A_2^{(1)} + \rho_2$, составим уравнение относительно

$$\xi^2 g_2 \left(A_2^{(2)} + \rho_2\right)^3 + \left(A_2^{(1)} + \rho_2\right)^2 B + \left(A_2^{(1)} + g_2\right)\frac{a}{4} P_2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 + D = 0 \quad (41)$$

Учитывая (40) мы получим из (41)

$$\xi^2 g_2 \left(A_2^{(1)} + \rho_2\right)^3 + 2A_2^{(1)} \rho_2 B + \rho_2^2 B + \rho_2 \frac{a}{4} P_2 = 0 \quad (42)$$

Отсюда,

$$\rho_2 = \frac{-\xi^2 g_2 \left(A_2^{(1)} + \rho_2\right)^3 - \rho_2 B}{2A_2^{(1)} B + \frac{a}{4} P_2} \quad (43)$$

При $\xi = 0,1$, $\gamma = 0,5,$ $A_2^{(1)} = 0,5119$ найдем $\rho_2 = -0,00006773.....$

Таким образом второе приближение C_2 для C равно

$$C_2 = C_2^* = \xi\left(A_2^{(1)} + \rho_2\right) \quad (44)$$

Мы получим при $\xi = 0,1$, $\gamma = 0,5,$ $C_2 = C_2^* = 0,05118323$ и окончательное выражение для $y_2(t,\xi)$:

$$y_2(t,\xi) = -0,0927\cos t + 0,0242\sin t - 0,0050\sin 2t + 0,0031\sin 3t + 0,0001\cos 4t \quad (45)$$

Точно также получим значение C_2 при $A_2 = A_2^{(2)}$.

Аналогичным образом находим дальнейшие приближения $C_K(\xi)$ $K \ge 3$ для постоянной $C(\xi)$, а также $y_K(t,\xi)$, $K \ge 3$.

Таким образом, мы показали, как можно строить периодические решения в критических ситуациях второго порядка. С помошью метода конечных мажорируюших уравнений Ляпунова можно доказать сходимость последовательных приближений к исходному решению, если ξ не превосходит некоторой границы.

Список литературы

1. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. –М., Наука, 1979. -431 с.
2. Лика Д.К.,Рябов Ю.А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. – Кишинев: Штиница, 1974.-291 с.
3. Рябов Ю.А., Бердиёров А.Ш. Периодические решения линейных интегро-дифференциальных уравнений в критических случаях высших порядков. -48-я НМ и НИК МАДИ, Москва, 1990.
4. Бердиёров А.Ш. Построение периодических решений интегро- дифференциального уравнения типа Вольтерра с бесконечным последействием в критическом случае выше первого порядка. Деп. ВИНИТИ 16.04.1990 г. № 2056-В90. -11 с.

УДК 517.984

УНИТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ